Parita funkcie  
- aby sme vedeli rozhodnut o parite f(x), jej definicny obor musi byt symetricky, tj: x ∊ D(f) => -x ∊ D(f)

Parna  
- ked plati: f(x) = f(-x)  
- funkcia je symetricka okolo suradnicovej osy y  
- napr: f(x) = x2, f(x) = cos x, atd…

Neparna  
- ked plati: f(-x) = -f(x)  
- funkcia je symetricka okolo pociatku suradnicoveho systemu  
- napr: f(x) = x3

Ohranicenie funkcie  
Nech je dana neprazdna mnozina A ⊆ R

Horna zavora  
- prvok b ∊ R nazveme hornou zavorou mnoziny A prave, ked [∀](http://en.wikipedia.org/wiki/Turned_a) x ∊ A plati: x ≤ b  
- mnozina A je zhora ohranicena, ak ma aspon jednu hornu zavoru

Dolna zavora  
- prvok a ∊ R nazveme dolnou zavorou mnoziny A prave, ked [∀](http://en.wikipedia.org/wiki/Turned_a) x ∊ A plati: x ≥ a  
- mnozina A je zdola ohranicena, ak ma aspon jednu dolnu zavoru

**Mnozina A je ohranicena, ak je ohranicena zdola aj zhora.**

Supremum  
- najmensia z hornych zavor

Infimum  
- najvacsia z dolnych zavor

Najvacsi ani najmensi prvok v mnozine A nemusi existovat, aj ked je mnozina A ohranicena, ale  
supremum a infimum existuju vzdy.

1. Kazda neprazdna zhora ohranicena mnozina A ⊆ R ma supremum.  
2. Kazda neprazdna zdola ohranicena mnozina A ⊆ R ma infimum.

Limita  
Funkcia f(x) ma v bode x0 limitu L, pokial sa funkcne hodnoty f(x) lubovolne blizia k cislu L, ked je x  
dostatocne blizko k x0 :

Nevlastne cisla: +∞, -∞  
=> R\* = R ∪ {+∞; -∞}

Limita je **vlastna**, ak L ∊ R, **nevlastna**, ak L ∊ {+∞; -∞}.  
Limita je vo **vlastnom bode**, ak x0 ∊ R, v **nevlastnom bode** ak x0 ∊ {+∞; -∞}.

Limita zprava  
Funkcia f(x) ma v bode x0 limitu zprava rovnu cislu L ∊ R\* : , pokial pre kazde okolie  
O(L) bodu L existuje δ > 0 tak, ze pre vsetky x ∊ (x0, x0 + δ) je f(x) ∊ O(L).

Limita zlava  
Funkcia f(x) ma v bode x0 limitu zlava rovnu cislu L ∊ R\* : , pokial pre kazde okolie   
O(L) bodu L existuje δ > 0 tak, ze pre vsetky x ∊ (x0 – δ, x0) je f(x) ∊ O(L).

Neexistencia limity  
1. Skok – funkcia ma obe jednostranne limity vlastne, ale nerovnaju sa  
2. Nekonecny skok – funkcia ma obe jednostranne limity, aspon jedna je nevlastna a nerovnaju sa  
3. Oscilacia – napr f(x) = sin v bode x0 = 0.

Vlastnosti limit  
1. Funkcia f(x) ma v bode x0 ∊ R\* prave jednu limitu  
2. Ak ma funkcia f(x) v bode x0 ∊ R\* limitu L, potom je f(x) ohranicena na nejakom rydzom okoli  
bodu x0.  
3. Funkcia f(x) ma limitu prave, ked existuju obe jednostranne limity a rovnaju sa.

Veta o troch limitach  
Nech x0 ∊ R\*, ak g(x) ≤ f(x) ≤ h(x) na nejakom rydzom okoli bodu x0 a plati: ,  
potom tiez existuje limita funkcie f(x) a plati: .

Spojitost  
Funkcia f(x) je spojita v bode x0 ∊ R, ak existuje v tomto bode vlastna limita L, v bode x0 existuje  
funkcna hodnota f(x0) a tieto hodnoty sa rovnaju: .

Odstranitelna nespojitost  
Ak sa jednostranne limity funkcie f(x) v bode x0 rovnaju (tj. funkcia f(x) ma v bode x0 limitu L) ale limita L  
je rozna od funkcnej hodnoty funkcie f(x) v bode x0 tj: .

Weierstrassova veta  
Ak je funkcia spojita na uzavretom intervale [a,b], potom je na tomto intervale ohranicena a nadobuda  
v nom svoje najmensie a najvacsie hodnoty.

Bolzanova veta  
Ak je funkcia spojita na uzavretom intervale [a,b], potom na tomto intervale nadobuda vsetky hodnoty  
medzi svojou najmensou a najvacsou hodnotou.

Prosta funkcia  
Funkcia f je prosta, ak pre kazde dva x1, x2 ∊ D(f) plati: x1 ≠ x2 => f(x1) ≠ f(x2).

Ak ma funkcia f(x) derivaciu v kazdom bode mnoziny (intervalu) I, potom hovorime, ze f(x) je   
diferencovatelna na I.   
Napr: f(x) = xn je diferencovatelna na ℝ, f(x) = je diferencovatelna na (-∞, 0) a (0, ∞)

Ak ma funkcia f(x) v bode x0 vlastnu derivaciu f’(x0), potom je funkcia f(x) spojita v bode x0.

Ak je funkcia f(x) v bode x0 spojita, neznamena to, ze tam existuje derivacia, napr: f(x) = |x| v x0 = 0.

Vety o strednej hodnote

Rolleova  
Nech f(x) je spojita na [a,b] a diferencovatelna na (a,b) a nech f(a) = f(b), potom existuje aspon jeden  
bod c ∊ (a,b) pre ktory plati, f’(c) = 0.

Lagrangeova  
Nech f(x) je spojita na [a,b] a diferencovatelna na (a,b), potom existuje aspon jeden bod c ∊ (a,b) pre  
ktory plati, f’(c) = (dotycnica v bode x = c je rovnobezna s priamkou prechadzajucou bodmi  
[a, f(a)] a [b, f(b)].

L’Hospitalovo pravidlo  
Bud x0 ∊ R\* a nech je typu alebo , ak existuje limita (vlastna alebo nevlastna), potom plati:

= = L

Neurcite vyrazy limit:  **, , ∞ - ∞, 0 \* ∞ , 1∞ , 00 , ∞0**

Typy a mozme riesit L’Hospitalovym pravidlom.

Typ ∞ - ∞ prevedieme na typ alebo ak mame zlomky, dame rovno na spolocneho menovatela.

Napr: f – g = - = =

Typ 0 \* ∞ prevedieme na typ alebo

Napr: f \* g = f \* = = pripadne prevratime druhu funckciu: f \* g = \* g = =

Typy 00, 1∞, ∞0 vyuzivame pri nich vzorec: fg = = =

Monotonia funkcie a extremy

Funkcia f(x) je :  
- rastuca na intervale I, ak plati f(x1) < f(x2) pre kazde x1, x2 ∊ I, x1 < x2  
- klesajuca na intervale I, ak plati f(x1) > f(x2) pre kadze x1, x2 ∊ I, x1 < x2  
- neklesajuca na intervale I, ak plati f(x1) ≤ f(x2) pre kazde x1, x2 ∊ I, x1 < x2  
- nerastuca na intervale I, ak plati f(x1) ≥ f(x2) pre kadze x1, x2 ∊ I, x1 < x2

Nech f(x) ma vlastnu derivaciu na otvorenom intervale I, potom:  
1. Ak f’(x) > 0 [∀](http://en.wikipedia.org/wiki/Turned_a)x ∊ I, potom funkcia f(x) je rastuca na intervale I.  
2. Ak f’(x) < 0 [∀](http://en.wikipedia.org/wiki/Turned_a)x ∊ I, potom funkcia f(x) je klesajuca na intervale I.

Lokalne extremy

Funkcia f(x) ma v bode x0 ∊ D(f):  
- lokalne maximum, ak f(x) ≤ f(x0) pre vsetky x z nejakeho okolia bodu x0- lokalne minimum, ak f(x) ≥ f(x0) pre vsetky x z nejakeho okolia bodu x0  
- ostre lokalne maximum, ak f(x) < f(x0) pre vsetky x z nejakeho rydzeho okolia bodu x0  
- ostre lokalne minimum, ak f(x) > f(x0) pre vsetky x z nejakeho rydzeho okolia bodu x0

Stacionarny bod  
Bod, v ktorom prva derivacia funkcie je nulova: f’(x) = 0

Funkcia moze mat lokalne extremy len v stacionarnych bodoch, alebo v bodoch, kde f’(x) = 0.

Definicny obor derivacie funkcie je podmnozinou definicneho oboru funkcie: **D(f’) ⊆ D(f)**

Nech x0 stacionarny bod funkcie f(x), tj: f’(x0) = 0 a nech existuje druha derivacia v x0: f’’(x0)  
1. Ak je f’’(x0) > 0, potom je v bode x0 **ostre lokalne minimum**  
2. Ak je f’’(x0) < 0, potom je v bode x0 **ostre lokalne maximum**

Globalne extremy

Funkcia f(x) ma v bode x0 ∊ D(f):  
- globalne maximum na mnozine M ⊆ D(f), pokial f(x) ≤ f(x0) pre vsetky x ∊ M  
- globalne minimum na mnozine M ⊆ D(f), pokial f(x) ≥ f(x0) pre vsetky x ∊ M

Ak je funkcia na uzavretom intervale [a,b] spojita, existuje na nej globalne minimum aj maximum.

Ak vieme, ze globalne extremy existuju, potom musia byt v stacionarnych bodoch alebo v bodoch, kde  
f’(x) neexistuje, alebo v krajnych bodoch intervalu.

Konvexnost, konkavnost  
Nech ma funkcia f(x) vlastnu derivaciu na interval I ⊆ D(f):  
- funkcia f(x) je **konvexna** na intervale I, ak f’(x) je neklesajuca na I  
- ak je f’’(x) > 0 na I, potom je f(x) **konvexna** na intervale I  
- funkcia f(x) je **konkavna** na intervale I, ak f’(x) je nerastuca na I  
- ak je f’’(x) < 0 na I, potom je f(x) **konkavna** na intervale I

Inflexny bod  
- bod x0 je inflexny bod funkcie f(x), ak v nejakom jeho lavom okoli je funkcia konvexna v nejakom jeho  
pravom okoli je funkcia konkavna, alebo naopak, tj: meni sa v tomto bode konvexnost na konkavnost  
alebo naopak  
- ak existuje vlastna druha derivacia f’’(x0) v inflexnom bode x0, potom je f’’(x0) = 0  
- ak je f’’(x0) = 0 a f’’’(x0) ≠ 0, potom je x0 inflexny bod

Asymptoty  
Funkcia f(x) moze mat ako asymptotu zvyslu priamku (asymptota bez smernice) alebo priamku so  
smernicou: rozlisujeme asymptotu v ∞ a v -∞

Priamka x = x0 je asymptotou bez smernice funkcie f(x), ak je aspon jedna jednostranna limita   
v bode x0 nevlastna tj: = [±](http://en.wikipedia.org/wiki/Plus-minus_sign) ∞ alebo [±](http://en.wikipedia.org/wiki/Plus-minus_sign) ∞

Priamka y = ax + b (a,b ∊ ℝ) je asymptotou so smernicou v ∞ ak:  
 -∞, ak:

a = b =

Diferencial  
Nech x0 ∊ D(f) je bod v ktorom existuje f’(x0) funkcie y = f(x):  
- diferencial dx: dx = x – x0  
- diferencial dy: dy = f’(x0) \* dx

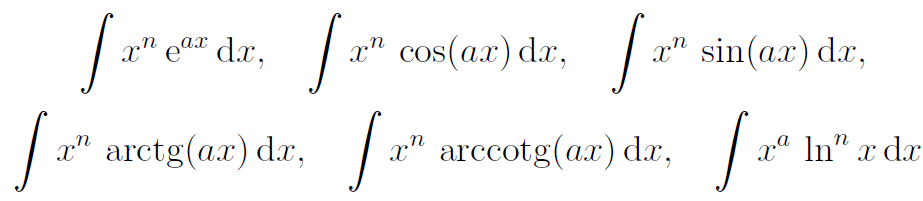
Diferencial dy je zmena funkncnych hodnot na dotycnici, hodnoty na dotycnici aproximuju  
funkcne hodnoty f(x) pre x blizko bodu x0 => f(x) [≈](http://en.wikipedia.org/wiki/Equals_sign#Approximately_equal) f(x0) + df(x0) tj: f(x) [≈](http://en.wikipedia.org/wiki/Equals_sign#Approximately_equal) f(x0) + f’(x0)(x – x0)

Primitivna funkcia  
Nech f(x) a F(x) su funkcie definovane na intervale I. Funkcia F(x) je primitivna k funkcii f(x) na intervale  
I, ak F’(x) = f(x), pre vsetky x ∊ I.

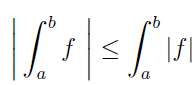
Neurcity integral ∫ je mnozina vsetkych primitivnych funkcii k dakej funkcii f(x), vsetky tieto funkcie  
sa lisia maximalne o realnu konstantu.

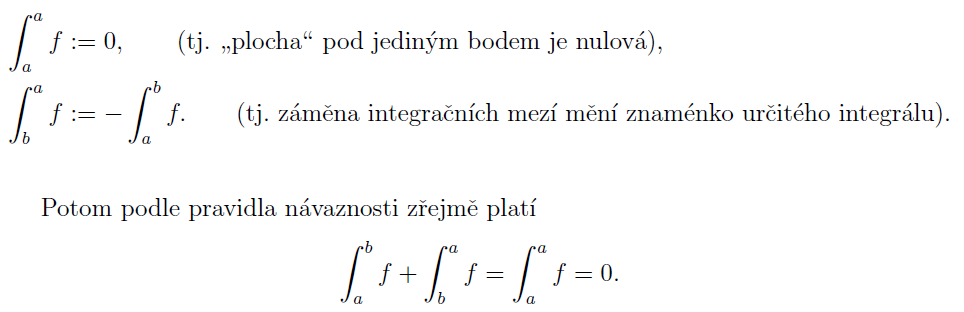
∫ f(x) dx = {F(x) + C, C ∊ ℝ} = F(x) + C

Ak je funkcia spojita => je integrovatelna.  
Ak je funkcia integrovatelna nemusi byt spojita.

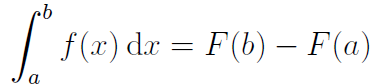
Metoda per-partes vhoda hlavne pre integraly typu:

Urcity integral  
- konecny pocet bodov nespojitosti neovplyvni integrovatelnost funkcie

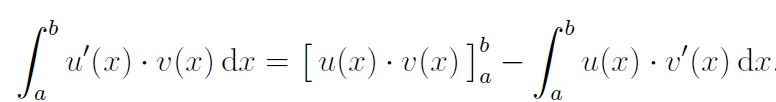
 Napr: |5 – 3| = 2 ale |5| + |-3| = 8



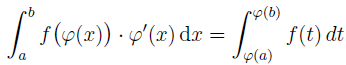
Newton-Leibnizov vzorec  
Ak je f ∊ R[a,b] a ak je F(x) lubovolna primitivna funkcia k f(x) na (a,b) pricom F(x) je spojita na [a,b],  
potom:



Metoda per-partes pre urcity integral



Metoda substitucie pre urcity integral



Plocha medzi grafmi  
Nech f, g ∊ R [a,b] a f(x) ≥ g(x) na [a,b], potom ma plocha medzi grafmi tychto funkcii na intervale [a,b]   
velkost P = . (tj: horna funkcia – dolna funkcia), ak odcitame hornu funkcie od dolnej,  
vyjde rovnaka plocha len s opacnym znamienkom => dame do absolutnej hodnoty.

Ak pre tieto dve funkcie plati, ze existuje x ∊ [a,b] take, ze: f(x) = g(x), tj: v nejakom bode sa pretinaju,   
vyriesime rovnicu f(x) = g(x), tj: zistime ich priesecniky, a integrujeme zvlast jednotlive podintervaly.

Dlzka grafu  
Ak ma funkcia f(x) spojitu derivaciu na intervale [a,b], potom ma jej graf na intervale [a,b] dlzku

Dlzka grafu = dx

Objem rotacneho telesa  
Ak funkcia f(x) je spojita nezaporna funkcia na intervale [a,b], objem rotacneho telesa, ktore vznikne  
rotaciou plochy medzi grafom funkcie f(x) a osou x na intervale [a,b]

V =π

Objem rotacneho telesa vymedzeneho prienikom dvoch funkcii f(x) a g(x) je

V = π , kde **a** a **b** su body prieniku tychto dvoch funkcii

Obsah plasta rotacneho telesa  
Ak funkcia f(x) je nezaporna so spojitou derivaciou f’(x) na intervale [a,b], obsah plasta rotacneho telesa,  
ktore vznikne rotaciou krivky f(x) na interval [a,b] okolo osy x, je

S = 2π

Nevlastny integral  
Plocha medzi grafom funkcie f(x) a osou x na neohranicenom intervale, tj: [a, ∞], (-∞, b], (-∞, ∞).

, ,

Pravidla pre vypocet nevlastneho intergralu ostavaju nezmenene, len je potreba neurcite vyrazy   
obsahujuce symbol ∞ pocitat pomocou limity.

Nevlastny integral 1. Druhu  
Ak je funkcia f(x) definovana na intervale [a, ∞) a ak existuje vlastna limita:

= L, potom hovorime ze nevlastny integral konverguje a kladieme:

= L

Ak je funkcia f(x) definovana na intervale [a, ∞) a ak existuje nevlastna limita, potom nevlastny integral  
diverguje a kladieme:

∞

Nekonecna rada

= a0 + a1 + a2 + … + an + … (nekonecna (ciselna) rada), kde an je n-ty clen

Sn = a0 + a1 + a2 + … + an sa nazyva n-ty ciastocny sucet nekonecnej rady

Geometricka rada

a + aq + aq2 + aq3 + … + aqn + … = , kde cisla **a** a **q** su pevne zvolene realne cisla  
q = kvocient geometrickej rady, moze byt kladny aj zaporny

pre q = 1 je ciastocny sucet geometrickej rady: **sn = a(n+1)**

pre q ≠ 1 je ciastocny sucet geometrickej rady: **sn = a**

Konvergencia, divergencia, oscilacia nekonecnej rady  
Ak existuje vlastna limita = s, potom nekonecna rada **konverguje k cislu s**

Ak existuje nevlastna limita ∞ , potom nekonecna rada  **diverguje** k [±](https://en.wikipedia.org/wiki/Plus-minus_sign)∞

Ak limita neexistuje, potom nekonecna rada **osciluje**

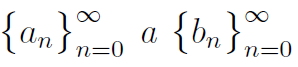
Nech a ≠ 0 a kvocient |q| < 1, tj: -1 < q < 1, potom je sucet geometrickej rady

Nutna podmienka konvergencie rady  
Ak nekonecna rada konverguje, potom nutne plati

= 0, teda ak tato limita je rozna od nuly alebo neexistuje, rada nekonverguje

Ak je tato limita nulova, rada moze konvergovat ale nemusi, tj: je to nutna ale nie postacujuca  
podmienka konvergencie.

Nekonecne rady s nezapornymi clenmi  
Taketo rady nemozu divergovat k -∞ , nemozu ani oscilovat.  
Tieto rady bud diverguju k +∞ alebo konverguju.  
Postupnost ciastocnych suctov tychto radov je **neklesajuca**, tj: ≤

Zrovnavacie kriterium  
Nech  su postupnosti nezapornych cisel, pre ktore plati: 0 ≤ ≤ , pre vsetky  
n a vyssie, tj: n, n+1, n+2 …, potom plati:

(i) Ak konverguje, potom konverguje aj

(ii) Ak diverguje k ∞, potom diverguje aj k ∞

Pr: Nekonecna rada konverguje, pretoze je mozne ju zhora ohranicit radou   
pocinajuc indexom n = 0, pricom vieme, ze tato rada konverguje => musi konvergovat aj rada

Pr2: Nekonecna rada diverguje kj ∞ , pretoze jej cleny sa daju zdola obmedzit clenmi  
harmonickej rady pocinajuc indexom n = 3, a vieme ze harmonicka rada diverguje => diverguje  
nutne aj rada

Nekonecna rada diverguje pre p ≤ 1, konverguje pre p > 1.

Integralne kriterium  
Nech je nekonecna rada s nezapornymi clenmi, nech f(x) je funkcia definovana na intervale  
[N, ∞) , ktora je na tomto interval nezaporna a nerastuca, plati:

f(n) = an, pre vsetky n ≥ N

konverguje ⬄ konverguje

diverguje ⬄ diverguje, tj: je ∞

Pr: Harmonicka rada = dx = - 1 = **∞** => **DIVERGUJE**

Podielove kriterium  
Nech je nekonecna, rada s kladnymi clenmi a predpokladajme ze existuje limita

= q, potom:

(i) tato rada konverguje, ak q < 1  
(ii) tato rada diverguje, ak q > 1  
(iii) nevieme rozhodnut o konvergencii alebo divergencii rady ak q = 1

Pravidlo je vhodne pre vyrazy obsahujuce faktorialy.

Pre geometricku radu , kde a > 0 a q > 0 podla podieloveho kriteria plati:

= = q => takato rada konverguje pre q < 1 a diverguje pre q > 1

Odmocninove kriterium  
Nech je nekonecna rada s nezapornymi clenmi pre vsetky n ≥ N, pre nejake N ∊ℕ ∪ {0}  
a predpokladajme ze existuje limita

= q potom plati:

(i) tato rada konverguje ak q < 1  
(ii) tato rada diverguje ak q > 1  
(iii) neda sa rozhodnut o konvergencii a divergencii rady ak q =1

Odmocninove kriterium je silnejsie:  
Ak sa da urcit konvergencia/divergencia nekonecnej rady podielovym kriteriom => da sa urcit aj   
odmocninovym kriteriom.  
Ak sa da urcit konvergencia/divergencia nekonecnej rady odmocninovym kriteriom, neznamena to,   
ze sa da urcit aj podielovym kriteriom.

Alternujuce rady  
Nekonecne rady, ktorych cleny menia znamienka

pripadne

Nekonecna rada = je alternujuca harmonicka rada (Leibnizova rada)  
a tato rada konverguje

Pre alternujuce rady s **nerastucimi** nezapornymi clenmi je nutna podmienka konvergencie

= 0 zaroven aj postacujucou podmienkou konvergencie rady.

Absolutne a relativne konvergentne rady  
Ak konverguje rada , potom konverguje aj povodna rada

Nekonecna rada **konverguje absolutne**, ak konverguje prislusna rada absolutnych hodnot.  
Ak nekonecna rada konverguje, ale nekonverguje absolutne, potom rada **konverguje relativne**.

Pr: **konverguje relativne**, pretoze rada absolutnych hodnot je harmonicka rada, o ktorej  
vieme ze diverguje.

Pr2: => dx = – (-) = 0 – (-1) = 1 => **konverguje absolutne**

Relativne konvergentna rada  
ma dostatocny pocet kladnych clenov na to, aby ked sa kladne cleny zrataju, konvergovala k + ∞  
a ma tiez dostatocny pocet zapornych clenov na to, aby ked sa zaporne cleny zrataju, konvergovala k - ∞

Mocninne rady

= a0 + a1x + a2x2 + … je mocninna rada so stredom v bode x0 = 0

= a0 + a1(x – x0) + a2(x – x0)2 + … je mocninna rada so stredom v bode x0

Mocninna rada, ktorej vsetky koeficienty su an = 1 so stredom v bode x0 = 0, tj:

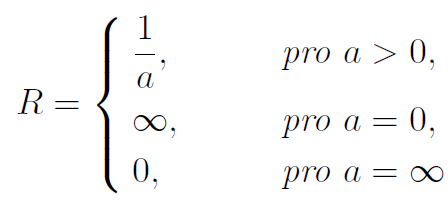
= 1 + x + x2 + x3 + x4 + … tato rada je geometricka s pociatocnym clenom a = 1 a kvocientom q=x,

teda rada konverguje pre |x| < 1, pricom jej sucet je

Polomer konvergencie mocninnej rady  
Kazda mocninna rada konverguje vo svojom strede.

(i) Ak mocninna rada konverguje pre nejake x = c, potom konverguje pre vsetky x ∊ℝ, pre ktore:  
|x – x0| < |c – x0|, tj: pre vsetky body blizsie k stredu ako bod c

(ii) Ak mocninna rada nekonverguje pre nejake x = d, potom nekonverguje pre vsetky x ∊ℝ, pre ktore:  
|x – x0| > |d – x0|, tj: pre vsetky body dalej od stredu ako bod d

 Kde

a = |, alebo

a =

Derivacia mocninnej rady  
Nech ma mocninna rada polomer konvergencie R > 0, potom ma funkcia s(x) na intervale   
(-R, R) derivaciu vsetkych radov

s’(x) = =

* Mocninnu radu mozme derivovat clen po clene => mozme zamenit poradie sumacie a derivacie   
  a polomer konvergencie sa nemeni

Pr: = =x \* = x \* ( = x \* ()’ = x \* =   
Tento vzorec je platny pre x ∊ (-1, 1), lebo na tom intervale dana rada konverguje

Neurcity integral mocninnej rady  
Nech ma mocninna rada polomer konvergencie R > 0, potom ma funkcia s(x) na intervale   
(-R, R) integraciu:

= =

* Mocninnu radu mozme integrovat clen po clene => mozme zamenit poradie sumacie a  
  integracie a polomer konvergencie sa nemeni

Pr: = = dx) = = =  
ln(1+x) + C pre x ∊ (-1, 1)

Este potrebujeme urcit konkretne C => za C dosadime stred, pretoze v nom vieme lahko urcit  
konvergenciu => kazda mocninna rada ma vo svojom strede sucet = 0, po dosadeni dostavame:

0 = ln 1 + C, teda C = 0 (dosadili sme stred, v tomto pripade x0 = 0)

= ln(1+x) pre x ∊ (-1, 1)

Urcity integral pre mocninne rady  
Nech ma mocninna rada polomer konvergencie R > 0, potom pre lubovolny interval  
[a,b] ⊆ (-R, R) plati:

= = ) -